Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se reducă sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = x, \end{cases}$$

   la o singură ecuaţie de ordin superior şi să se gasească apoi soluţia sa generală.

2. Să se determine suprafaţa de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) \;=\; xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z\,\mathbf{k},$$

   care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = 2y \\ z = 1. \end{cases}$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)^2}\,dx.$$

4. În planul complex la distanţă finită, funcţia $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)^3}$ are singularităţile -1 (pol simplu) şi 1 (pol triplu). Se cere dezvoltarea funcţiei în serie Laurent în jurul punctului $z_0 = 1$.

5. Seria Fourier a unei funcţii periodice.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011
Matematici Speciale
Examen

1. Să se determine suprafaţa de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x,y,z) \;=\; x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z - x^2 - y^2 + 1)\,\mathbf{k},$$

   care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x - z &= a^2 \\ x^2 + y^2 &= a^2 - 1 \end{cases}.$$

2. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că

$$u(x,y) \;=\; x^3 - 3xy^2 + 2xy - x \quad \text{şi} \quad f(0) = i$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx.$$

4. Să se dezvolte în serie Taylor funcţia $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ într–o vecinătatea lui $z_0 = 0$.

5. Divergenţa unui câmp vectorial.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi, liniar şi omogen

$$\begin{cases} y_1' &= -9y_1 - 12y_2 - 5y_3, \\ y_2' &= 5y_1 + 6y_2 + 3y_3, \\ y_3' &= y_1 + 4y_2 + y_3. \end{cases}$$

   Indicaţie. Se va utiliza metoda eliminării. Se ajunge la ecuaţia diferenţială liniară şi omogenă de ordinul trei cu coeficienţi constanţi $y_1''' + 2y_1'' - 4y_1' - 8y_1 = 0$, căreia i se va determina soluţia generală.

2. Să se determine suprafaţa de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) \;=\; xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathbf{k},$$

   care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= 1 \\ z &= y^2 \end{cases}$$

3. Să se arate că dacă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ este olomorfă într–un domeniu D, atunci funcţia $\psi(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, unde

$$U(x, y) = e^{v(x,y)} \cos u(x, y), \quad V(x, y) = -e^{v(x,y)} \sin u(x, y),$$

   este olomorfă pe D.

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

5. Rotorul unui câmp vectorial.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul doi cu coeficienţi constanţi, neomogenă

$$y'' - 9y' + 20y = x^2 \cdot e^{4x}$$

şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţiile iniţiale $y(0) = -1$, $y'(0) = -3$.

2. Să se determine suprafaţa de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) \;=\; x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z - x^2 \sin y)\,\mathbf{k},$$

care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = y^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 4x + 5)^2}\, dx.$$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f(t)$, de perioadă π, definită pe intervalul $(0, \pi)$ prin $f(t) = e^{-at}$, unde a este o constantă reală pozitivă.

5. Domeniul de convergenţă a unei serii Laurent.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se rezolve sistemul diferenţial liniar şi neomogen

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + \cos x. \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} y_1 &= e^{x/2}\Big(C_1 \cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\Big) - \sin x \\ y_2 &= \dfrac{1}{2}e^{x/2}\Big(\big(C_1 + C_2\sqrt{3}\big)\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \big(C_2 - C_1\sqrt{3}\big)\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\Big) - \cos x. \end{cases}$$

2. Pentru funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ se cunoaşte partea sa reală

$$u(x,y) = \frac{x}{2}\ln(x^2+y^2) - y\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}, \quad f(z_0) = 0.$$

Să se determine $f(z)$ ştiind că este funcţie olomorfă.
Răspuns: $f(z) = z\ln z$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}, \quad a > 0.$$

4. Să se determine suprafaţa de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \cosh x\,\mathbf{i} + y\sinh x\,\mathbf{j} + \frac{z}{2}\sinh x\,\mathbf{k},$$

care trece prin curba

$$(\Gamma): \begin{cases} y &= a\cosh x \\ z &= 0. \end{cases}$$

5. Sisteme diferenţiale sub formă simetrică.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine acea soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$$

care satisface condiţiile iniţiale $y(0) = 0$ şi $y'(0) = 1$.

Indicaţie: Se arată că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este $y = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^x + x^2\cos x$, după care se determină constantele arbitrare din condiţiile iniţiale.

2. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este olomorfă pe un domeniu D din planul complex, atunci funcţia reală de două variabile reale

$$\varphi(x,y) \;=\; \left(e^{v(x,y)} + e^{-v(x,y)}\right)\sin u(x,y)$$

este armonică pe D, deci să se arate că $\nabla^2\varphi(x,y) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

4. Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le n\pi, \\ 0, & |t| > n\pi, \end{cases}$$

n fiind un număr natural, $n \ge 1$.

5. Forma complexă a seriei Fourier.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Se dă câmpul de forţă definit pe $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}.$$

   Să se arate că $\mathbf{F}$ este câmp vectorial irotaţional şi să se determine funcţia de forţă.

2. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ştiind că

$$v(x, y) \;=\; e^x(x\sin y + y\cos y) + x + y \quad \text{şi} \quad f(0) = 0.$$

   Răspuns: $f(z) = (1 + i)z + z\,e^z$.

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\cos 2x}{x^2 - 2x + 10}\,dx.$$

4. Să se determine funcţia $f(t)$ care satisface ecuaţia integrală Fourier

$$\int_0^{\infty} f(t)\cos tx\,dt = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad x \geq 0,$$

   unde a este o constantă pozitivă.

5. Sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală. Legătura cu ecuaţiile diferenţiale de ordinul n. Integrale prime. Soluţie generală.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se găsească soluţia generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

2. Să se demonstreze că au loc identităţile

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\mathbf{u}) &= \varphi(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot(\nabla\varphi)\\ \nabla\times(\varphi\mathbf{u}) &= \varphi(\nabla\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}\times(\nabla\varphi),\end{aligned}$$

unde ∇ este operatorul lui Hamilton, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ sunt divergenţa şi rotorul câmpurilor vectoriale tipărite după semnul "$\cdot$" respectiv "$\times$" care sunt definite pe domeniul $D\subset I\!R^3$, cu valori în $I\!R^3$, iar $\nabla\varphi$ este gradientul câmpului scalar $\varphi : D\subset I\!R^3 \to I\!R$.

3. Folosind metodele de calcul ale unor integrale reale cu ajutorul teoriei reziduurilor, să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\cdot\frac{\sin\omega x}{x}dx = \pi\Big(e^{-a\omega}-\frac{1}{2}\Big),\quad \omega>0,\quad a>0.$$

4. Să se reprezinte printr–o serie Fourier funcţia $f(t)$, periodică de perioadă 2π, definită prin

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru} \quad t\in(0,\pi)\\ -1, & \text{pentru} \quad t\in(\pi,2\pi)\end{cases}$$

5. Funcţia exponenţială în complex

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a sitemului de ecuaţii diferenţiale sub formă normală

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2} \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$$

2. Să se demonstreze identitatea

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}),$$

   unde $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ este operatorul lui Hamilton, $\nabla \times \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ este rotorul câmpului vectorial $\mathbf{u}$, $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ este divergenţa produsului vectorial al vectorilor $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$, iar punctul dintre doi vectori reprezintă produsul scalar al acelor vectori.

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 - 2x + 10}\, dx.$$

4. Să se afle transformata Fourier prin cosinus a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ şi din rezultatul obţinut să se deducă relaţia

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ux}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi u e^{-u}}{4}.$$

5. Derivata după o direcţie a unui câmp scalar sau vectorial. Gradientul unui câmp scalar.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine regiunile planului complex unde funcţia complexă de variabilă complexă
$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$
este olomorfă. În fiecare regiune găsită, să se determine derivata funcţiei $f(z)$.

2. Să se calculeze integrala complexă
$$\int_C z e^z \, dz,$$
unde curba C este segmentul de dreaptă având extremităţile în origine şi în punctul $z = \frac{\pi}{2} i$.

3. Fie funcţia complexă
$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$
Să se dezvolte $f(z)$ în serie de puteri ale lui z pe domeniul $1 < |z| < 2$.

4. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţială
$$y'' - 2y' + 10y = 0,$$
cu condiţiile iniţiale $y(\pi/6) = 0$, $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$.

5. Câmpuri vectoriale. Linii şi suprafeţe de câmp.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ştiind că

$$u(x, y) \;=\; x^3 - 3xy^2 + 2xy - x \quad \text{şi} \quad f(0) = i.$$

2. Să se studieze comportarea seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n}(z - 2i)^n.$$

3. Să se reprezinte printr–o serie Fourier funcţia periodică de perioadă $T = \pi$ $f(t) = |\sin t|$.

4. Se consideră ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordin 1

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

   Se cere să se determine soluţia generală şi să se rezolve problema Cauchy cu condiţia iniţială $u(x, y, 1) = x + y$.

5. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene. Matrice fundamentală a unui sistem omogen. Determinantul lui Wronski. Soluţia generală a unui sistem omogen de ecuaţii diferenţiale.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că partea sa reală este
$$u(x,y) \;=\; e^x \sin y + \frac{2x}{x^2+y^2},$$
iar valoarea funcţiei în punctul $z_0 = 1$ este $f(z_0) = 2 - ie$.

2. Să se dezvolte în serie trigonometrică Fourier funcţia
$$f(x) = \frac{1}{5+3\sin x}.$$
Indicaţie: se va alege ca interval de lungime perioada $T = 2\pi$ intervalul $[-\pi, \pi]$.

3. Se consideră ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordin 1
$$xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$
a) Să se determine soluţia generală;
b) Să se rezolve problema Cauchy cu datele
$$\begin{cases} x &= a \\ 2ayz &= a^2+2. \end{cases}$$

4. Să se arate că au loc identităţile:
$$\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathbf{0}, \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = 0.$$

5. Seriile trigonometrice Fourier a unei funcţii pare şi a unei funcţii impare.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala complexă

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(i-z)^3}\, dz,$$

unde Γ este cercul de rază a cu centrul în origine şi $a \neq 1$. Discuţie după a.

2. Să se dezvolte în serie trigonometrică Fourier funcţia

$$f : [-\ell, \ell] \to I\!R,\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad x \in [-\ell, 0] \\ x, & \text{pentru} \quad x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

3. Se dă câmpul de forţe

$$F(x,y,z) = yz(2x+y+z)\mathbf{i} + xz(x+2y+z)\mathbf{j} + xy(x+y+2z)\mathbf{k}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este irotaţional şi să se determine funcţia de forţă.

4. Folosind metoda eliminării, să se determine soluţia generală a sistemului liniar de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x' &= -x+y+z+e^t \\ y' &= x-y+z+e^{3t} \\ z' &= x+y+z+4 \end{cases}$$

şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţiile iniţiale

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$

5. Serii de puteri în complex. Teorema lui Abel. Raza de convergenţă a unei serii de puteri.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala complexă

$$I \;=\; \int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+9)^2},$$

unde curba Γ este, pe rând, unul din discurile

$$\Gamma : \begin{cases} 1) & |z-2i| & = & 2; \\ 2) & |z+2i| & = & 2; \\ 3) & |z| & = & 4. \end{cases}$$

2. Să se dezvolte în serie trigonometrică Fourier funcţia

$$f(x) = \frac{1-\alpha\,\cos x}{1-2\alpha\,\cos x+\alpha^2},\;\; |\alpha|<1,\;\; \alpha\neq 0.$$

Indicaţie: se va alege ca interval $[\alpha,\alpha+T]$ intervalul $[-\pi,\pi]$.

3. Să se integreze ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordin 1, cuasiliniară

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=z+\frac{x_1x_2\cdots x_n}{z}.$$

4. Să se arate că au loc egalităţile:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \nabla\cdot\mathbf{u}+\nabla\cdot\mathbf{v}; \\ \nabla\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \nabla\times\mathbf{u}+\nabla\times\mathbf{v}, \end{aligned}$$

unde $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sunt câmpuri vectoriale diferenţiabile pe domeniul $D\subset I\!R^3$, ∇ este operatorul lui Hamilton, $\nabla\cdot$ este divergenţa şi $\nabla\times$ este rotorul câmpului vectorial scris alăturat.

5. Dezvoltarea unei funcţii analitice într–o serie Laurent.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f(z) = \dfrac{3z+2}{z(z-1)^2}$

$$a) \quad \text{în jurul punctului} \quad z_0 = 1;$$
$$b) \quad \text{în jurul punctului} \quad z_0 = 0.$$

2. Utilizând teorema reziduurilor, să se arate că

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2 - \pi^2}\, dz = 0,$$

unde Γ este cercul de rază arbitrară $R > 0$ cu centrul în origine.

3. Folosind transformarea Fourier, să se rezolve ecuaţia integrală

$$\int_0^\infty \varphi(u)\, \cos xu\, du = \frac{1}{x^2+1}.$$

4. Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia **factorul discontinuu al lui Dirichlet**

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru} \quad |t| < a, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{pentru} \quad t = \pm a, \\ 0, & \text{pentru} \quad |t| > a, \end{cases}$$

unde $a > 0$ este un număr constant.

5. Integrale reale de forma $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$, unde $\mathcal{R}(\sin\theta, \cos\theta)$ este o funcţie raţională în $\sin\theta$ şi $\cos\theta$, rezolvate cu ajutorul teoremei reziduurilor.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se calculeze derivata câmpului scalar

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

   după direcţia de parametri $(2, -1, 2)$ în punctul $M_0(1, 2, 3)$.

2. Să se afle raza de convergenţă a seriei de puteri în complex

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala improprie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + x + 3}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$$

4. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) \;=\; x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\mathbf{k}.$$

5. Câmpuri scalare. Suprafeţe de nivel. Curbe de nivel.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se găsească punctele din planul complex în care funcţia

$$f(z) \;=\; z^2 \,+\, i\,\overline{z}^2 + 4\,z \,+\, 6\,\overline{z} \,+ 8$$

   este monogenă. În punctele găsite, să se calculeze derivat funcţiei.

2. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) \;=\; (xy - 2z^2)\mathbf{i} + (4xz - y^2)\mathbf{j} + (yz - 2x^2)\mathbf{k}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2},\; a > 0.$$

4. Să se determine funcţia $\varphi(x)$ astfel încât câmpul vectorial

$$\mathbf{v}(P) = 2x\varphi(x)\,\mathbf{i} - y\varphi(x)\,\mathbf{j} + 6x^2z\mathbf{k}$$

   să fie solenoidal.
   Răspuns: Din condiţia ca div $\mathbf{v}(P) = 0$ rezultă ecuaţia diferenţială liniară

$$\varphi'(x) + \frac{1}{2x}\varphi(x) = -3x,$$

   care se integrează cu formula $\varphi(x) = e^{-\int P(x)dx}\Big(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\Big)$, unde $P(x) = \dfrac{1}{2x}$ şi $Q(x) = -3x$. Se obţine $\varphi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}} - \dfrac{6x^2}{5}$.

5. Serii de funcţii de o variabilă complexă, uniform convergente. Criteriul lui Weierstrass, criteriul lui Cauchy şi proprietăţile de continuitate, integrabilitate şi derivabilitate a sumei $f(z)$ a unei serii de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ uniform convergentă pe un domeniu $D \subset \mathbb{C}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Se dă câmpul scalar $\varphi(x,y,z) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^2}$, unde

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

   Să se calculeze unghiul dintre gradientul acestui câmp în punctul $A(2,1,1)$ şi gradientul aceluiaşi câmp în punctul $B(0,1,-1)$.

2. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x,y,z) \;=\; (xz-y)\mathbf{i} + (yz-x)\mathbf{j} + (1-z^2)\mathbf{k}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}dx.$$

4. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ când se cunosc partea imaginară

$$v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$$

   şi valoarea sa în punctul $z_0 = 1$ care este $f(z_0) = 0$.

5. Proprietăţi ale transformatei Fourier.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Fie ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi cuasiliniară

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Să se determine soluţia generală şi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţia iniţială

$$z(2, y) = 1 + y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x &= 2, \\ z &= 1 + y^2. \end{cases}$$

2. Fie funcţia complexă

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Să se dezvolte $f(z)$ în serie de puteri ale lui z pe domeniul $1 < |z| < 2$.

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 6x + 10)^2}\,dx.$$

4. Să se calculeze rotorul câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(P) = \text{ rot } \mathbf{u}(P) + \text{ grad } (z^2),$$

unde $\mathbf{u}(P) = x\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + (x^2 + z^2)\mathbf{k}$, şi să se arate că el este irotaţional, deci că rot $\mathbf{v}(P) = \mathbf{0}$.

5. Câmpuri vectoriale. Linii şi suprafeţe de câmp.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuaţia cu derivate parţiale liniară şi omogenă
$$z\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)^2\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
cu condiţia iniţială $u(x,0,z) = 2z(z-x)$.

2. Să se determine funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, olomorfă în întreg planul complex la distanţă finită, ştiind că :
$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy; \quad f(0) = 0.$$

3. În planul complex la distanţă finită, funcţia $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)^3}$ are singularităţile -1 (pol simplu) şi 1 (pol triplu). Se cere dezvoltarea în serie Laurent a acestei funcţii în exteriorul discului închis
$$\overline{B}(1,2) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| \le 2\}.$$

4. Se consideră câmpul vectorial
$$\mathbf{v}(P) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + u(x,y)\,\mathbf{k}.$$
Să se dtermine funcţia necunoscută $u = u(x,y)$ astfel încât $\mathbf{v}\cdot\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} = 0$.

5. Sisteme de n ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală şi legătura lor cu ecuaţiile diferenţiale de ordinul n.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se determine soluţia generală $\{y(x), z(x)\}$ a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

$$\begin{cases} y' &= z; \\ z' &= -y \end{cases}$$

   şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţiile iniţiale

$$y(\pi/3) = 1, \quad z(\pi/3) = -1.$$

2. Se cere: integrala generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi cuasiliniare

$$xy^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)z;$$

   suprafaţă integrală care conţine curba

$$\begin{cases} y &= 1, \\ z &= x \sin(x^2 - 1). \end{cases}$$

3. Scrieţi rotorul câmpului vectorial $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, arătaţi că

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$$

   este un câmp irotaţional pe $I\!R^3$ şi determinaţi–i funcţia de forţă.

4. Calculul integralelor reale de forma $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$ cu ajutorul teoremei reziduurilor şi rezolvarea efectivă a integralei

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta}, \; a \in I\!R, \quad |a| > 1.$$

   Răspuns: $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

5. Funcţia exponenţială în complex.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine suprafaţa de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + (x^2+y^2)z\mathbf{k},$$

care trece prin curba Γ de ecuaţii

$$\Gamma: \begin{cases} x &= 2y, \\ z &= 1. \end{cases}$$

2. Să se determine punctele $z = x + iy$ în care funcţia complexă de variabilă complexă

$$f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2)$$

este monogenă şi să se calculeze derivata funcţiei în punctele găsite.

3.
   - Să se scrie formula de evaluare a reziduului unei funcţii complexe de variabilă complexă $f(z)$ într–un pol simplu z_0 al ei şi într–un punct multiplu z_0 de multiplicitate p.
   - Folosind formulele cerute mai sus, să se determine reziduurile funcţiei

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}.$$

4.
   - Integrale de forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ calculate cu ajutorul teoremei reziduurilor;
   - Să se calculeze integrala improprie $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$

5. Seria Fourier a unei funcţii periodice.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se determine soluţia generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

2. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\mathbf{k}.$$

3. Fie variabila complexă $z = x + iy$ şi $\overline{z} = x - iy$ conjugata complexă a acesteia. Să se determine punctele z în care funcţia complexă de variabilă complexă

$$f(z) = z^2 + 2z\overline{z} - 2\overline{z}^2 + 3z + 2\overline{z},$$

este monogenă şi să se calculeze $f'(z)$ în punctele determinate.

4. Să se calculeze integrala

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{1 + z^2}\,\sin\frac{\pi}{z}\,dz,$$

unde Γ este o elipsă de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

în următoarele cazuri: $0 < b < 1$, $b > 1$.

5.
   - Dezvoltarea unei funcţii analitice într–o serie Laurent.
   - Să se dezvolte în serie Laurent funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

în coroana circulară $0 < |z| < 1$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 şi 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

2. Să se calculeze integrala complexă $I = \int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-2i)}\,dz$, unde conturul C este cercul $|z - 3i| = r$, cu raza $r > 0$ diferită de 1 şi de 3, parcurs în sens direct trigonometric. Discuţie după r.

3. Folosind formulele integrale ale lui Cauchy, să se calculeze integrala

$$\int_C \frac{z}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz,$$

unde conturul C este cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$, parcurs în sens direct trigonometric.

4. Se consideră câmpul scalar $\varphi(x, y, z) = \dfrac{yz}{x}$ definit pe un domeniu tridimensional inclus în semispaţiul $x > 0$. Se cere:

   (a) ecuaţia suprafeţei de nivel care trece prin punctul $M(1, 1, 1)$;

   (b) versorul normalei la suprafaţa de nivel determinată la punctul precedent;

   (c) derivatele câmpului scalar φ, în punctul $M(1, 1, 1)$, după direcţiile date de versorii vectorilor $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$ şi $\mathbf{u}_2 = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

5. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z (serie Laurent) funcţia complexă

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6},$$

în coroana circulară cu centrul în origine $1 < z < 2$.

Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple şi se găseşte

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}.$$

Fiecare fracţie simplă se dezvoltă în serie Laurent.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale
$$\begin{cases} x' + y - z &= 0 \\ y' - z &= 0 \\ z' + x - z &= \cos t. \end{cases}$$
Indicaţie. Aplicând teoria, se ajunge la ecuaţia diferenţială liniară de ordinul trei, cu coeficienţi constanţi şi neomogenă $z''' - z'' + z' - z = -\cos t$ căreia i se află soluţia generală.

2. Să se rezolve sistemul simetric $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}$.
Indicaţie. Prima integrală primă se determină din primele două rapoarte. A doua se determină din ultimele două rapoarte. Pe parcurs se înlocuieşte y ca funcţie de x şi constanta arbitrară C_1. În final, C_1 se înlocuieşte cu expresia obţinută din prima integrală primă.

3. Se consideră câmpul vectorial $\mathbf{v}(P) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + u(x,y)\mathbf{k}$, unde x, y, z sunt coordonatele punctului $P \in \mathbb{R}^3$, iar $u(x,y)$ este o funcţie necunoscută definită pe $\mathbb{R}^2$. Să se determine funcţia $u = u(x,y)$ astfel încât $\mathbf{v} \cdot rot\mathbf{v} = 0$.

4. Se dă funcţia complexă de variabilă complexă
$$f(z) = z^2 + i\bar{z}^2 + 4z + 6\bar{z} + 8,$$
unde $z = x+iy$, iar $\bar{z} = x - iy$. Să se afle punctele în care funcţia este monogenă (derivabilă) şi să se calculeze derivata ei în aceste puncte.

5. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala definită
$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(17 + 8\cos x)^2} dx.$$
Indicaţie: Funcţia de integrat fiind pară, integrala se poate extinde la un interval simetric faţă de origine $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{(17 + 8\cos x)^2} dx = \dfrac{1}{2}J$. Integrala J se calculează cu ajutorul teoriei reziduurilor folosind in prealabil schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$. Integrala J devine una complexă pe cercul $|z| = 1$ având funcţia de integrat $f(z) = \dfrac{2}{i}\dfrac{z^2+1}{(4z^2 + 17z + 4)^2}$ cu polii dubli $z_1 = -1/4 \in D : |z| < 1$ şi $z_2 = -4$ care nu aparţine lui D.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniară şi neomogenă

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

   Indicaţie. Se determină intâi soluţia generală y_o a ecuaţiei omogene asociate şi apoi, folosind metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange, se determină o soluţie particulară y_p a ecuaţiei date.

   Răspuns: $y = y_o + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}(1 - e^{-x}) \ln(e^x + 1) + e^x.$

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -y_1 + y_3. \end{cases}$$

3. Să se arate că $\mathbf{v}(P) = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ este un câmp irotaţional şi să se determine potenţialul lui scalar.

   Indicaţie. Se arată că $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ şi apoi se dtermină potenţialul scalar $\varphi(P)$ integrând expresia diferenţială $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ pe un drum paralel cu axele de coordonate cu extremitaţile punctul fix $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi punctul variabil $P(x, y, z)$.
   Răspuns. $\varphi(P) = xy + yz + zx + C$, unde C este o constantă arbitrară.

4. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ştiind că $v(x, y) = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ şi $f(1) = 0$.

   Răspuns: $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, cunoscută sub numele de *transformarea lui Jukowski.*

5. Funcţia exponenţială în complex.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ştiind că

   $$v(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - 2x^3 - y^3$$

   şi că valoarea funcţiei în $z_0 = 0$ este $f(0) = 0$.

   Răspuns: $f(z) = (1-2i)z^3$.

2. Să se calculeze reziduurile funcţiei $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}$ în toate punctele singulare.

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

   $$I = \int_C \frac{z^{100}e^{i\pi z}}{z^2+1}dz,$$

   unde conturul C este elipsa de semiaxe $a = 1$ şi $b = 2$ de ecuaţie $4x^2+y^2-4 = 0$.

   Răspuns: $I = -2\pi \cosh \pi$.

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f(t)$, de perioadă π, definită pe intervalul $(0,\pi)$ prin $f(t) = e^{-at}$, unde $a > 0$ este o constantă.

   Răspuns: $f(t) = \dfrac{1-e^{-a\pi}}{\pi}\Big(\dfrac{1}{a} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a\cos 2kt + 2k\sin 2kt}{a^2+4k^2}\Big)$.

5. Definiţia integralei Fourier şi forma complexă a integralei Fourier.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale liniară, neomogenă şi cu coeficienţi constanţi
$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$
care satisface condiţiile iniţiale $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

   Indicaţie: Se determină intâi soluţia generală y_0 a ecuaţiei omogene asociate şi apoi, folosind metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange, se determină o soluţie particulară y_p a ecuaţiei date. Se găseşte
$$y = y_o + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$
   Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile iniţiale.

   Răspuns: $y = \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)$.

2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă
$$xz\frac{\partial u}{\partial x} - yz\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală
$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)^2},$$
   unde a şi b sunt două numere reale pozitive diferite.

   Indicaţie. $I = \frac{1}{2}J$, unde $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)^2}$, iar aceasta integrală se calculează cu teoria reziduurilor.

4. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial
$$\mathbf{v}(P) = (x^2 \operatorname{div} \mathbf{r})\mathbf{i} + 3\operatorname{rot}\,[(z + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}] + \operatorname{grad}(z^3).$$

5. Relaţiile Cauchy–Riemann de olomorfie ale unei funcţii complexă de variabilă complexă.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se integreze ecuaţia diferenţială $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă
$$(x-a)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial u}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se arate că $\mathbf{v}(x,y,z) = \dfrac{2x}{z}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{z}\mathbf{j} - \dfrac{x^2+y^2}{z^2}\mathbf{k}$ este câmp vectorial irotaţional şi să se determine potenţialul scalar.

   Răspuns. $\mathbf{v}(P) = \operatorname{grad}\varphi(P)$, unde $\varphi(P) = \dfrac{x^2+y^2}{z} + C$.

4. Să se determine soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia
$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
   cu condiţia iniţială $z(2,y) = y^2 + 1$.

   Răspuns: Integrala primă este $x^3y^2 = C$ şi soluţia căutată este $z = \dfrac{1}{8}x^3y^2 + 1$.

5. Să se deducă seria Taylor a funcţiei $f(z) = e^z$ în vecinătatea originii.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniară, neomogenă, cu coeficienţi constanţi $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele iniţiale $y(0) = 0$ şi $y'(0) = 1$.

   Indicaţie: Soluţia particulară se caută de forma $y_p = Ax^2e^{3x}$, unde A este constantă ce se determină din condiţia ca y_p să fie soluţie a ecuaţiei date.

2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale
$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se determine funcţia derivabilă $\varphi(x)$ astfel încât câmpul vectorial
$$\mathbf{v}(P) = 2x\varphi(x)\mathbf{i} - y\varphi(x)\mathbf{j} + 6x^2z\mathbf{k}$$
   să fie solenoidal.

   Indicaţie. Se impune condiţia div $\mathbf{v}(P) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z} = 0.$

   Răspuns: $\varphi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}} - \dfrac{6x^2}{5}.$

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala complexă
$$I = \int_{|z|=3/2} \frac{z^3 \cdot e^z}{(z-1)^2(z^2 + iz + 2)} dz.$$

5. Să se dezvolte în serie de puteri într–o vecinătate a punctului $z_0 = 3$ funcţia
$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$
   şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.

   Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple. Se obţine
$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3}$$
   după care se foloseşte seria geometrică cu raţia q, unde $|q| < 1$.

   Răspuns: $f(z) = -\dfrac{1}{z-3} + \dfrac{7}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)(z-3)^n.$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniară, neomogenă şi cu coeficienţi constanţi
$$y'' + 6y' + 8y = 2\sin x + 3\cos x.$$
Indicaţie: Soluţia particulară se caută de forma $y_p = A\cos x + B\sin x$.

2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă
$$xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într–o vecinătate a punctului $z_0 = 0$ funcţia
$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$
şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.
Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple. Se obţine
$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3},$$
se pune în evidenţă binomul $z - 3$, după care se foloseşte seria geometrică cu raţia q, unde $|q| < 1$.
Răspuns: $f(z) = -\dfrac{2}{3} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n.$

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4\cos x}dz.$$
Indicaţie. Este o integrală de forma $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x, \cos x)dx$, unde $\mathcal{R}$ este o funcţie raţională. Se face schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$.
Răspuns: $I = \pi/4$.

5. Să se determine seria Laurent a ramurii principale a funcţiei complexe de variabilă complexă $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ în coroana circulară $1 < |z| < \infty$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniară, neomogenă, cu coeficienţi constanţi
$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$$
şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele iniţiale $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

   Indicaţie: Soluţia particulară se caută de forma $y_p = Axe^{3x}$, unde A este constantă ce se determină din condiţia ca y_p să fie soluţie a ecuaţiei date.

2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă
$$(x - y + z)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într–o vecinătate a punctului $z_0 = 2$ funcţia
$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$
şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.

   Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple, punându–se în evidenţă în acelaşi tipm binomul $z - 2$. Se obţine
$$f(z) = 1 + \frac{1}{1 + (z-2)} + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{1 - (z-2)}$$
după care se foloseşte seria geometrică cu raţia q, unde $|q| < 1$.

   Răspuns: $f(z) = \dfrac{2}{z-2} + 3 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z-2)^{2n}$.

4. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial
$$\mathbf{v}(P) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z(x^2 + y^2)\mathbf{k}$$
şi suprafaţa de câmp care trece prin curba $(\Gamma) : \begin{cases} x = 2y \\ z = a, \end{cases}$ unde $a \in I\!R$.

5. Să se demonstreze că funcţia complexă $f(z) = \dfrac{1}{\sin \dfrac{1}{z}}$ are în punctul $z_0 = 0$ un punct singular esenţial neizolat.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniară, neomogenă, cu coeficienţi constanţi
$$y'' - 7y' + 12y = xe^{3x}$$
şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele iniţiale $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

   Indicaţie: Soluţia particulară se caută de forma $y_p = x(Ax + B)e^{3x} = (Ax^2 + Bx)e^{3x}$, unde A şi B sunt constante reale.

2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasi–liniară neomogenă
$$(xy^3 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3).$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într–o vecinătate a punctului $z_0 = 1$ funcţia
$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$
şi să se precizeze apoi natura punctului z_0 pentru funcţia $f(z)$.

   Indicaţie. Se descompune funcţia $f(z)$ în fracţii simple, punându–se în evidenţă în acelaşi tipm binomul $z - 1$. Se obţine
$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{2}{1-(z-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \dfrac{z-1}{2}}$$
după care se foloseşte seria geometrică cu raţia q, unde $|q| < 1$.
Răspuns: $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^{n+1}} - 2\Big)(z-1)^n.$

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{2 + \cos x} dz.$$

   Indicaţie. Este o integrală de forma $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x, \cos x)dx$, unde $\mathcal{R}$ este o funcţie raţională. Se face schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$.

5. Serii de funcţii de o variabilă complexă uniform convergente. Proprietăţi.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniară, neomogenă, cu coeficienţi constanţi
$$y'' + 11y' + 30y = e^{3x}$$
şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele iniţiale $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

   Indicaţie: Soluţia particulară se caută de forma $y_p = Ae^{3x}$, unde A este constantă ce se determină din condiţia ca y_p să fie soluţie a ecuaţiei date.

2. Să se găsească suprafaţa integrală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi neomogenă
$$xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x$$
care trece prin curba (C_a) de ecuaţii
$$(C_a) : \begin{cases} x & = & a \\ 2ayz & = & a^2 + 2, \end{cases}$$
unde a este o constantă reală arbitrară şi pozitivă.

3. Să se arate că dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $\cos z$ este
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

4. Să se arate că $\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(x, y, z) = yz(2x+y+z)\mathbf{i}+zx(x+2y+z)\mathbf{j}+xy(x+y+2z)\mathbf{k}$ este un câmp vectorial irotaţional şi să se determine potenţialul lui scalar.

   Indicaţie. Se arată că $\operatorname{rot} \mathbf{v}(P) = \mathbf{0}$ şi se determină funcţia scalară $\varphi(P)$ cu proprietatea $\mathbf{v}(P) = \operatorname{grad} \varphi(P)$.
   Răspuns: Funcţia potenţial are expresia
$$\varphi(P) = \int_{P_0 P} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0}^{x} v_1(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} v_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} v_3(x, y, t)dt.$$
   Se găseşte $\varphi(x, y, z) = xyz(x + y + z) + C$, unde C este o constantă reală.

5. Funcţiile circulare şi funcţiile hiperbolice în complex.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniară, neomogenă, cu coeficienţi constanţi
$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$$
şi apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele iniţiale $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

   Indicaţie: Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale omogene $y''-2y'+2y = 0$ are rădăcinile complex conjugate $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este $y_0 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x$. Soluţia generală a ecuaţiei date este $y = y_0 + y_p$, unde y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei date. Soluţia particulară se caută de forma $y_p = x(A\cos x + B\sin x)e^x$, unde A şi B sunt constante care se determină din condiţia ca y_p să fie soluţie a ecuaţiei date. Se determină apoi soluţia problemei lui Cauchy.

2. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi cuasiliniară $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ cu condiţia iniţială $z(2, y) = 1 + y^2$.

3. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de puteri
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3n-2)2^n}(z - 1 + i)^n$$
şi să se reprezinte grafic discul de convergenţă.

   Răspuns: Raza de convergenţă este $R = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integralele
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx.$$

   Răspuns: $I_1 = I_2 = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

5. Expresia derivatelor unei funcţii olomorfe.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se găsească soluţia problemei lui Cauchy a ecuaţiei $y'' - 2y' + 10y = 0$ cu condiţiile iniţiale $y(\pi/6) = 0$, $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$.

2. Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia

$$f(z) = (\cosh y + a \sinh y) \cos x + i(\cosh y + b \sinh y) \sin x$$

să fie olomorfă în întreg planul complex la distanţă finită şi apoi să se calculeze $f'(z)$.

Răspuns: $a = b = -1$. Funcţia are forma $f(z) = \cos z + i \sin z = e^{iz}$, de unde găsim $f'(z) = ie^{iz}$.

3. Să se găsească soluţia generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

Indicaţie: Se determină două integrale prime independente funcţional.

4. Să se determine forma trigonometrică a numărului complex $z = \sqrt{3} + i$.

Indicaţie. Se determină modulul şi argumentului numărului z. Se găseşte $|z| = 2$ şi $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{6}$.

Răspuns: $z = 2(\cos \dfrac{\pi}{6} + i \sin \dfrac{\pi}{6})$.

5. Serii Taylor.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, unde $z = x + iy$, ştiind că partea imaginară este

   $$v(x, y) = (x \sin y + y \cos y)e^x + x + y$$

   şi că valoarea funcţiei în $z_0 = 0$ este $f(z_0) = 0$.

   Indicaţie: Se folosesc condiţiile Cauchy–Riemann şi independenţa de drum a unei integrale curbilinii şi se găseşte

   $$u(x, y) = (x \cos y - y \sin y)e^x + x - y.$$

   Pentru a pune în evidenţă variabila z se face $y = 0$ şi se trece x în z.
   Răspuns: $f(z) = z(e^z + 1 + i)$.

2. Folosind definiţia, să se arate că funcţia complexă

   $$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$$

   este monogenă în orice punct $z \in \mathbb{C}$ şi $f'(z) = 2z$.

   Indicaţie. Se studiază existenţa limitei $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

3. Să se determine punctele singulare la distanţă finită ale funcţiei

   $$f(z) = \frac{z^8 + 1}{(z^2 + 4)^3}$$

   şi să se precizeze comportarea ei în punctul de la infinit.

4. Să se calculeze integrala curbilinie în complex $I = \displaystyle\int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0}$, unde curba C_r este cercul de rază r cu centrul în punctul z_0 parcurs în sens trigonometric.

5. Câmpuri vectoriale. Linii şi suprafeţe de câmp.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' - 3y' + 2y = (3x - 2)e^x.$$

   Indicaţie. Soluţia generală este de forma $y = y_0 + y_p$ unde y_0 este soluţia generală a ecuaţiei omogenă asociată şi y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei date. Soluţia particulară se caută în forma $y_p = x(Ax + B)e^x$.

   Răspuns. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \dfrac{x}{2}(3x + 2)e^x$.

2. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, unde $z = x + iy$, ştiind că partea imaginară este

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - x$$

   şi că valoarea funcţiei în $z_0 = 0$ este $f(z_0) = i$.

   Indicaţie: Se folosesc condiţiile Cauchy–Riemann şi independenţa de drum a unei integrale curbilinii şi se găseşte

$$v(x, y) = -y^3 + 3x^2y - x^2 + y^2 - y + 1,$$

   Pentru a pune în evidenţă variabila z se face $y = 0$ şi se trece x în z.
   Răspuns: $f(z) = z^3 - iz^2 - z + i$.

3. Să se dezvolte în serie Taylor funcţia $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$ în vecinătatea punctului $z_0 = 1$.

4. Să se determine reziduurile funcţiei $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + 1)^n}$, unde $n > 1$ este un număr natural.

   Răspuns: Există doi poli multipli de ordinul n : $z_1 = i$; $z_2 = -i$. Reziduurile în aceste puncte sunt $\text{Rez}\,[f(z), z_1] = -i\dfrac{(2n - 2)!}{2^{2n-1}[(n - 1)!]^2} = -\text{Rez}\,[f(z), z_2]$.

5. Proprietăţi ale transformatei Fourier.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine funcţia olomorfă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, unde $z = x + iy$, ştiind că partea imaginară este
$$v(x, y) = (x \sin y + y \cos y)e^x$$
şi că valoarea funcţiei în $z_0 = 0$ este $f(z_0) = 0$. **Răspuns**: $f(z) = ze^z$.

2. Să se determine reziduurile funcţiei complexe inclusiv în $z = \infty$
$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}.$$
Indicaţie. Constatăm că $z_1 = 0$ este pol triplu, iar $z_2 = 1$ şi $z_3 = -1$ sunt poli simpli.
Răspuns: $\text{rez}[f(z), z_1] = 1$; $\text{rez}[f(z), z_2] = -\dfrac{1}{2}$; $\text{rez}[f(z), z_3] = -\dfrac{1}{2}$. Pentru calculul reziduului în punctul de la infinit aplicăm rezultatul: *suma tuturor reziduurilor este zero.*

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integralele
$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta.$$
Indicaţie. Aceste integrale se determină simultan considerând combinaţia
$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta.$$
Se efectuează schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$ şi ultima integrală devine
$$I_1 + iI_2 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 - (1 + a^2)z + a} dz$$
care se calculează folosind teorema reziduurilor.
Răspuns: $I_1 = \dfrac{2\pi a^n}{1 - a^2}$, $I_2 = 0$.

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(t)$, periodică de perioadă 2π,
$$f(t) = \begin{cases} 1, & \textit{pentru} \quad t \in (0, \pi) \\ -1, & \textit{pentru} \quad t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

5. Domeniul de convergenţă al unei serii Laurent.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Fie câmpurile scalare $\varphi(x,y,z) = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\psi(x,y,z) = \|\mathbf{c}\times\mathbf{r}\|$, unde $\mathbf{c} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ şi $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial $\mathbf{w}(x,y,z) = \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi$ şi suprafaţa de câmp care trece prin curba $\Gamma : x = y,\ x^2+y^2+z^2-3x-y-2z = 0$.

   Răspuns: Liniile de câmp sunt $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= C_1 \\ x+y+z &= C_2 \end{cases}$ iar suprafaţa de câmp este sfera $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^3-3 = 0$.

2. Să se determine funcţia complexă $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, unde $z = x+iy$, ştiind că partea reală este $u(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$ şi $f(1) = 0$.

   Indicaţie. Folosind formula $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$, se determină $f'(z)$. Pentru a găsi expresia sa în funcţie de z, se face $y = 0$ şi se trece x în z. Rezultă $f'(z) = -\dfrac{2}{(1+z)^2}$. **Răspuns**. $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia f de perioadă 2π, definită pe intervalul $(-\pi,\pi)$, prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{pentru} \quad 0 \le x < \pi \\ 0, & \textit{pentru} \quad -\pi < x < 0. \end{cases}$$

   Răspuns: $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$, $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{|z|=3} \frac{1}{z^3(z^2-1)(z-4)}dz.$$

   Răspuns. $I = -\dfrac{\pi i}{480}$.

5. Serii de puteri în complex. Teorema lui Abel.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.